数理解析研究所講究録 1265 巻 2002 年 100-106

Numerical method of a differential equation with regular singular points in magnetohydrodynamics

日本原子力研究所　徳田　伸二
Shinji Tokuda
Japan Atomic Energy Research Institute

1 序論

γ^2 を固有値とする次の固有値問題を考えよう $(0<x<1)$.

$$\frac{d}{dx}\left\{[\gamma^2+f(x)]\frac{d\phi}{dx}\right\}+V(x)\phi(x)=0,\quad \phi(0)=\phi(1)=0 \tag{1}$$

ただし、

$$f(x)\geq 0,\quad \text{for } 0\leq x\leq 1 \tag{2}$$

であって、かつ、$f(x_0)=0$ となる点 x_0 が区間 $(0,1)$ に存在する．もっと詳しくは

$$\exists x_0\in(0,1),\quad f(x)=f_0(x-x_0)^2+\cdots,\quad f_0>0 \tag{3}$$

この固有値問題は磁場閉じ込めプラズマの磁気流体力学的（MagnetoHydroDynamics）な安定性を記述する [1, 2]．もし、$\gamma^2>0$ の固有値を持てば、プラズマ中に擾乱が成長率 γ で $\exp(\gamma t)$ のように成長することを意味する．また、$\gamma^2<0$ とするとき、$\gamma^2+f(x_A)=0$ となる点 $x_A\in(0,1)$ が存在すると、γ^2 は連続スペクトルに属する．関数 $f(x)$ および $V(x)$ の具体的な形は、プラズマを閉じ込めている磁場配位（閉じ込め装置）、プラズマの圧力、さらには、プラズマ中に流れる電流密度等に依存する．ポテンシャル $V(x)$ があるパラメータ β に滑らかに依存すると仮定する．我々は次のような問題を解きたい．

問題 1 $\gamma^2>0$ の固有値を持つ β の値（臨界値）β_{cr} を求めよ．

問題 2 成長率 γ の β 依存性（**分散関係式**と呼ばれる）を求めよ．

もし

$$V(x;\beta)=V_0(\beta)+V_1(\beta)(x-x_0)+\cdots$$

のとき、不等式

$$V_0(\beta)\leq\frac{1}{4}f_0 \tag{4}$$

が成立しなければ、固有値問題は可算無限個の固有値を持つことが知られている．この不等式はSuydam条件と呼ばれている．以下、この条件は満たされていると仮定する．

固有値が十分に小さい($\gamma^2 << f_0$)場合を考えているので、特異摂動問題になっている．すなわち、特異点x_0から離れた領域では、方程式(1)は

$$\mathcal{N}\phi := \frac{d}{dx}\left\{f(x)\frac{d\phi}{dx}\right\} + V(x)\phi(x) = 0 \tag{5}$$

となる．この方程式は、点x_0が確定特異点であり、**Newcomb方程式**と呼ばれている．特異点の近傍では、変数を

$$x - x_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{f_0}}z \tag{6}$$

と引き伸ばすことにより、**内部層方程式**と呼ばれる方程式

$$\frac{d}{dz}\left\{(1+z^2)\frac{d\phi}{dz}\right\} + D\phi(z) = 0, \quad D := \frac{V_0}{f_0} \tag{7}$$

を得る($-\infty < z < \infty$).

Newcomb方程式はx_0のまわりで

$$\phi^{(s)}(x) = (x-x_0)^{-1/2+\mu}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m^s(x-x_0)^m\right] \tag{8}$$

となるFrobenius級数で展開される自乗可積分な解、および

$$\phi^{(b)}(x) = (x-x_0)^{-1/2-\mu}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m^b(x-x_0)^m\right] \tag{9}$$

となるFrobenius級数で展開される自乗可積分でない解が存在する．ここで、指数μは

$$\mu = \left(\frac{1}{4} - \frac{V_0}{f_0}\right)^{1/2} > 0 \tag{10}$$

で与えられる．一方、内部層方程式は、$z \to \pm\infty$で

$$\phi(z) \sim |z|^{-1/2\pm\mu} \tag{11}$$

と漸近する解を持つ．(8,9)式と(11)式から、Newcomb方程式の解と内部層方程式の解を漸近的に接続することによって、境界条件$\phi(0) = \phi(1) = 0$を満たす大域的な解が構成できることがわかる．そして、大域的な解が構成できる条件から固有値γが決定される．

実際の安定性解析においては、採用するプラズマの物理モデル（たとえば、電気抵抗や電子の慣性を考慮するかどうか等）によって内部層方程式が変更を受ける．しかし、内

部層方程式の解が漸近条件(11)を満たすこととNewcomb方程式を解かねばならないことには変わりない.

一般的にはNewcomb方程式も内部層方程式も解析的に解けないので、数値計算法の確立が必要である. 以下、、確定特異点を持つ微分方程式であるNewcomb方程式の、有限要素法を用いる数値計算法を述べながら、問題1,2の解法を議論する.

2 固有値問題

問題1を解く上で次の性質が重要な役割を果す. すなわち、Newcomb方程式に随伴する固有値問題

$$\frac{d}{dx}\left\{f(x)\frac{d\phi}{dx}\right\}+[V(x)+\lambda\rho(x)]\,\phi(x)=0,\quad \phi(0)=\phi(1)=0 \tag{12}$$

は古典的なSturm-Liouville型の固有値問題である（連続スペクトルを持たない）. ここで、重み関数$\rho(x)$は条件

$$\rho(x)=\rho_0(x-x_0)^2+\cdots,\quad \rho_0>0 \tag{13}$$

を満たし、確定特異点x_0で関数$\phi(x)$は自然境界条件を満たすものとする.

固有値問題(12)は、次の作用積分

$$W[\phi]:=\int_0^1\left[f(x)(\frac{d\phi}{dx})^2-V(x)\phi^2(x)\right]dx \tag{14}$$

を制約条件$(\rho\phi,\phi)=1$のもとで停留にする関数ϕを求めることと同値である. もちろん、(ξ,ζ)は二つの任意関数ξ, ζの内積である.

$$(\xi,\zeta):=\int_0^1\xi(x)\zeta(x)dx$$

そして、固有値λはそのときの作用積分そのものである：$\lambda=W[\phi]$

ポテンシャル関数$V(x)$がパラメータβに関して滑らかな関数であるとする. 固有値問題(12)の最小固有値λ_0の符号が正から負へ変わる時のβの値がもとの固有値問題(1)に対する臨界値β_{cr}を与える. そして、固有値問題(12)は、変分問題(14)に有限要素法を適用することによって容易に解くことができる[3]. さらに、固有値λ_0はβの正則関数である、すなわち、β_{cr}のまわりで

$$\lambda_0=c_\beta(\beta-\beta_{cr})+\cdots \tag{15}$$

と表すことができる．ここで、c_β は負の定数である．

また、(1) 式における固有値 γ^2 と (12) 式における固有値 λ_0 との関係を問うことができる．この問題は内部層方程式の解と Newcomb 問題の解を接続することによって解くことができ、それが問題 2 の答えを与える．

なお、すべての固有関数は、確定特異点 x_0 のまわりで、(8) 式と同じ初項 $(x-x_0)^{-1/2+\mu}$ を持つ Frobenius 級数で表される．

3 Newcomb 問題における応答法

Newcomb 方程式 (5) は 2 階の微分方程式であるので、$x=0$ の近傍で $\phi(0)=0$ となる解を構成することができる．この解を実軸に沿って右側へ解析接続して大域的な解を作ると、それは確定特異点 x_0 の左側で

$$\phi(x) = c(\phi^{(s)}(x) + \Delta_L^{-1}\phi^{(b)}(x)) \tag{16}$$

と表される（c は比例定数である）．ここで、Δ_L は、左側の**接続データ**と呼ばれ、確定特異点の左側での自乗可積分でない解に対する自乗可積分な解の割合を表す．同様にして、右側の接続データ Δ_R も考えることができる．接続データは MHD 安定性理論で重要な役割を果す．そして、Newcomb 方程式を解くということは、この接続データ Δ_p $(p=L,R)$ を求めることである．

Newcomb 問題は次のような**応答法**で解くことができる（問題をはっきりさせるため、左側 $p=L$ を考える）[3].

今、$\delta>0$ を与えられた正数とし、$\xi_L^{(b)}(x)$ を $\delta<x-x_0<0$ で自乗可積分でない解の有限項で打ち切った Frobenius 級数とし、$x-x_0>\delta$ で $\xi_L^{(b)}(x)=0$ としよう．すると、$\mathcal{N}\xi_L^{(b)}$ は、至るところで自乗可積分な、かつ、与えられた関数である．$\xi_{L,0}(x)$ を最小固有値 λ_0 に属する左側の固有関数とする．以上の準備の下に Newcomb 方程式の左側の解を

$$\phi_L(x) = \xi_{L,0}(x) + \lambda_0(\eta_L(x) + \Omega_L\xi_L^{(b)}(x)) \tag{17}$$

と表現しよう．ここで、$\eta_L(x)$ はこれから求めるべき自乗可積分な関数、Ω_L は未定乗数である．$\mathcal{N}\phi_L=0$ より、$\eta_L(x)$ に対する境界値問題

$$\mathcal{N}\eta_L = \rho\xi_{L,0} - \Omega_L\mathcal{N}\xi_L^{(b)},\ \ \eta_L(0)=\eta_L(1)=0 \tag{18}$$

を得る．確定特異点 x_0 で $\eta_L(x)$ は自然境界条件を満たすものとする．この方程式に対する可解条件として

$$(\xi_{L,0}, \rho\eta_L) = 0 \tag{19}$$

を課すと、乗数 Ω_L が

$$\Omega_L = \frac{1}{(\xi_{L,0}, \mathcal{N}\xi_L^{(b)})} \tag{20}$$

と固定される．

境界値問題 (18) に対応する変分問題を得るため、次の積分を停留にする変分問題を考える $(p = L, R)$.

$$W[\eta_p] + 2(\eta_p, h) + 2\nu(\eta_p, \xi_{p,0}) \tag{21}$$

$$h(x) := \rho(x)\xi_{p,0}(x) - \Omega_L\mathcal{N}\xi_L^{(b)}(x) \tag{22}$$

この変分問題から $\eta_p(x)$ および ν に対する方程式

$$\mathcal{N}\eta_p - \nu\rho\xi_{p,0} = h \tag{23}$$

$$(\rho\xi_{p,0}, \eta_p) = 0 \tag{24}$$

を得る．この方程式は $\nu = 0$ を解に持つので、変分問題 (21) を解くことは Newcomb 問題 (18) を解くことと同値である．そして、その変分問題に対して有限要素法を適用することができ、$\eta_p(x)$ は確定特異点 x_0 の近傍での挙動から接続データ Δ_p を求めることができる．(17) 式で表される $\phi_L(x)$ ならびに $\phi_R(x)$ を求めることができれば、Newcomb 方程式の一般解 $\phi(x)$ は、c_L, c_R を任意定数として

$$\phi(x) = c_L\phi_L(x) + c_R\phi_R(z) \tag{25}$$

で与えられる．

4 分散関係式

ここでは、問題 2 の答えをどのように得るか、その概略を示す．内部層方程式 (7) の解に偶奇のパリティー

$$\phi_e(-z) = \phi_e(z), \;\; \phi_o(-z) = -\phi_o(z) \tag{26}$$

を課すことができる.それらは、$z\to\infty$ で

$$\begin{aligned}\phi_e(z) &\sim z^{-1/2+\mu}+\Delta_{\mathrm{in},e}z^{-1/2-\mu}, \quad (27)\\ \phi_o(z) &\sim z^{-1/2+\mu}+\Delta_{\mathrm{in},o}z^{-1/2-\mu} \quad (28)\end{aligned}$$

のように振舞う. 内部層問題とは内部領域接続データ $\Delta_{\mathrm{in},p}$ $(p=e,o)$ を求めることである. そして、内部層方程式 (7) の解 $\phi(z)$ は、c_e, c_o を定数として

$$\phi(z)=c_e\phi_e(z)+c_o\phi_o(z) \quad (29)$$

で与えられる.$z\to-\infty$ での (29) の解と $x\to x_0-0$ での (25) の解を、また、$z\to\infty$ での (29) の解と $x\to x_0+0$ での (25) の解を漸近的に接続することにより係数 c_R, c_L および c_e, c_o に対する 4 つの一次方程式を得る. これが自明でない解を持つ条件から成長率 γ に関する**分散関係式**、すなわち、問題 2 の答え

$$\gamma=c\left(\frac{\lambda_0}{\Delta_{\mathrm{in},e}+\Delta_{\mathrm{in},o}}\right)^{1/(2\mu)} \quad (30)$$

を得る. ここで、c は比例係数である(詳細は文献 [4] を参照されたい). さらに、(15) 式を用いると、成長率 γ の β 依存性として

$$\gamma\propto(\beta-\beta_{cr})^{1/(2\mu)} \quad (31)$$

を得る.

5 まとめ

磁場閉じ込めプラズマの磁気流体力学的安定性問題においては、Newcomb 方程式と呼ばれる、内部に確定特異点をもつ同次な微分方程式を解くことが必要になる.本稿では Newcomb 方程式および関連する固有値問題を紹介した. Newcomb 問題の解は自乗可積分な成分と可積分でない成分とを含む. この問題を解く有効な応答法では、自乗可積分な成分を可積分でない成分の応答とみなして、自乗可積分な成分に関する境界値問題を解く. この方法は内部層問題の数値解法にも応用できる. これについては文献 [5] を参照されたい.

謝辞

研究集会「微分方程式の離散化手法と数値計算アルゴリズム」における発表ならびに講究録執筆の機会を賜りました電気通信大学加古孝教授に感謝します.

参考文献

[1] D. Biskamp, *Nonlinear Magnetohydrodynamics*, (Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1997), chap. 4.

[2] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, *Plasma Confinement*, (Addison-Wesley, New York, 1992), chap. 7.

[3] S. Tokuda and T. Watanabe, J. Plasma and Fusion Res. **73** (1997) 1141.

[4] S. Tokuda, Nuclear Fusion **41** (2001) 1037.

[5] S. Tokuda, J. Plasma and Fusion Res. **77** (2001) 276.